Prova Final

(Proposta de resolução) 19.ª edição – 2024/2025

Escolha múltipla

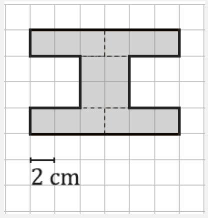
Versão **A**
Caso 1 – Opção D Caso 2 – Opção A Caso 3 – Opção A

Caso 4

O AgenteX tem cinco peças de madeira: quatro peças retangulares com 6 cm de comprimento e 2 cm de largura, e uma peça quadrada com 4 cm de lado.

Juntando as cinco peças, podem criar-se diferentes polígonos.

O polígono da figura ao lado tem doze lados e foi construído com as cinco peças.



a) Quanto mede o perímetro do polígono da figura ao lado?

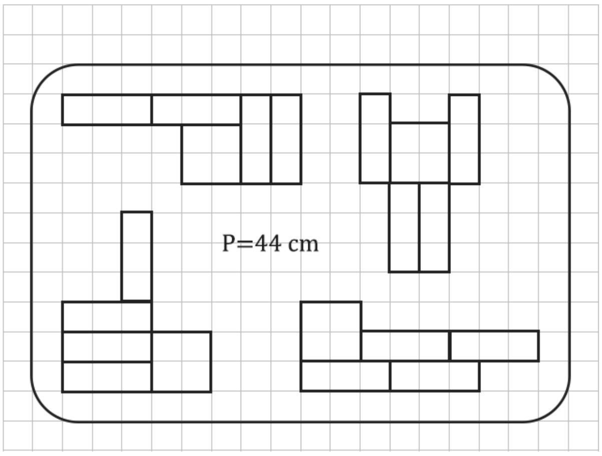
b) Utiliza as cinco peças do AgenteX e constrói um polígono com o perímetro igual a 44 cm.

c) Utiliza as cinco peças do AgenteX e constrói o polígono com o menor perímetro possível. Indica esse perímetro.

Resolução:

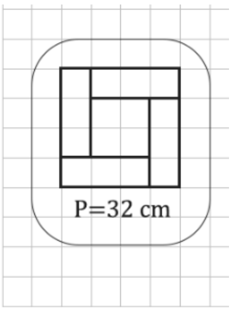
a) $P = 6 + 6 + 16 + 16 = 56\ cm$

b)



Nota: Há outras soluções

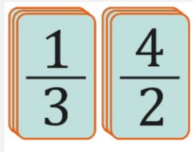
c)



Caso 5

O AgenteX pretende criar cartas para um novo jogo.

Cada carta terá representada uma fração em que o numerador e o denominador serão números naturais.



a) Se utilizar os números naturais **de 1 a 16**, <u>**sem os repetir**</u>, o AgenteX consegue criar oito cartas. No conjunto destas oito cartas quantas frações, no máximo, podem representar um número inteiro? Dá um exemplo dessas oito frações.

b) O AgenteX decidiu criar apenas sete cartas, utilizando os números naturais de **1 a 14**, <u>**sem os repetir**</u>. Como devem ser criadas as sete cartas de forma que a soma das frações com valor inteiro seja a maior possível? Qual é essa soma?

<u>Resolução</u>:

a) Para combinar os algarismos em 8 cartas de forma a dar o máximo de frações com resultado inteiro, deve-se ter em consideração:

- Divisores dos maiores números
- Os números primos

O 1 terá de dividir o 13 ou o 11. Assume-se, por exemplo, o 13.

	16	15	14	13	12	11	10	9
Divisores	~~1~~ 2 4 8	~~1~~ 3 5	~~1~~ 2 7	**1**	~~1~~ 2 3 4 6	~~1~~	~~1~~ 2 5	~~1~~ 3

O 3 terá de dividir o 9

	16	15	14	13	12	11	10	9
Divisores	~~1~~ 2 4 8	~~1~~ ~~3~~ 5	~~1~~ 2 7	**1**	~~1~~ 2 ~~3~~ 4 6	~~1~~	~~1~~ 2 5	~~1~~ **3**

O 5 terá de dividir o 15

	16	15	14	13	12	11	10	9
Divisores	~~1~~ 2 4 8	~~1~~ ~~3~~ **5**	~~1~~ 2 7	**1**	~~1~~ 2 ~~3~~ 4 6	~~1~~	~~1~~ 2 ~~5~~	~~1~~ **3**

O 2 terá de dividir o 10.

	16	15	14	13	12	11	10	9
Divisores	~~1~~ ~~2~~ 4 8	~~1~~ ~~3~~ **5**	~~1~~ ~~2~~ 7	**1**	~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ 4 6	~~1~~	~~1~~ **2** ~~5~~	~~1~~ **3**

O 7 terá de dividir o 14.

	16	15	14	13	12	11	10	9
Divisores	~~1~~ ~~2~~ 4 8	~~1~~ ~~3~~ 5	~~1~~ ~~2~~ 7	1	~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ 4 6	~~1~~	~~1~~ 2 ~~5~~	~~1~~ 3

Resposta: No máximo, 7 das frações terão resultado inteiro.

- Frações obrigatórias para a solução: $\frac{15}{5}$, $\frac{14}{7}$, $\frac{10}{2}$ e $\frac{9}{3}$
- Outras Frações: $\frac{16}{8}$, $\frac{12}{4}$ e $\frac{13}{1}$ (por exemplo)
- Fração com resultado não inteiro: $\frac{11}{6}$

b) Para combinar os algarismos em 7 cartas de forma a dar soma máxima nas frações inteiras, pode-se aproveitar o raciocínio da alínea anterior.

Escolhem-se os divisores de forma a dar resultados inteiro maiores.

O 1 terá de dividir o 13

	14	13	12	11	10	9	8
Divisores	2 7	1	2 3 4 6		2 5	3	2 4

Soma: **13**

O 2 terá de dividir o 14 e o 3 divide o 9

	14	13	12	11	10	9	8
Divisores	2	1	4 6		5	3	4

Soma: **23**

O 5 terá de dividir o 10, o 4 divide o 8 e o 6 divide o 12.

	14	13	12	11	10	9	8
Divisores	2	1	6		5	3	4

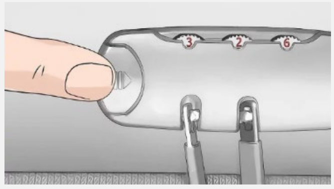
Soma: 7+13+2+0+2+3+2=**29**

Resposta: a soma máxima é 29.

- Frações inteiras: $\frac{14}{2}$, $\frac{13}{3}$, $\frac{12}{6}$, $\frac{10}{5}$, $\frac{9}{3}$ e $\frac{8}{4}$

Caso 6

O pai e a mãe do AgenteX têm, cada um, a sua mala de viagem.
Por vezes, os pais esquecem-se dos códigos, que são números de três algarismos.
O AgenteX decidiu, por isso, criar uma forma de os ajudar, limitando o número de códigos possíveis.



- O código da mala do pai tem os mesmos algarismos que o código da mala da mãe, mas o algarismo das unidades troca com o das centenas.
  Por exemplo, se o código da mala do pai for o 735, o código da mala da mãe é o 537.
- A soma dos dois códigos é um número entre 1000 e 2000 e tem, **exatamente**, três algarismos iguais seguidos.
- O código da mala do pai é o menor número dos dois.

Quantos códigos possíveis há para a mala do pai do AgenteX, respeitando estas condições?

<u>Resolução</u>:

Para que a **soma** dos dois códigos tenha exatamente três algarismos iguais e seguidos, existem duas formas:

$$\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{A} \quad \text{ou} \quad \boxed{1}\boxed{B}\boxed{B}\boxed{B}$$

Para a soma $\boxed{1\ 1\ 1\ A}$ existe apenas a possibilidade dos códigos somarem 1110. Os códigos nestas condições são:

$$\begin{array}{r} 555 \\ +\ 555 \\ \hline 1110 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 654 \\ +\ 456 \\ \hline 1110 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 753 \\ +\ 357 \\ \hline 1110 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 852 \\ +\ 258 \\ \hline 1110 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 951 \\ +\ 159 \\ \hline 1110 \end{array}$$

Para a soma $\boxed{1\ B\ B\ B}$ existem 3 possibilidades.
Como o algarismo do meio é igual nos dois códigos e a soma dos algarismos das centenas é maior que 10, os algarismos que se repetem só podem ser ímpares: 1333, 1555 ou 1777.

Para a soma 1333 existem 3 possibilidades:

$$\begin{array}{r} 716 \\ +\ 617 \\ \hline 1333 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 815 \\ +\ 518 \\ \hline 1333 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 914 \\ +\ 419 \\ \hline 1333 \end{array}$$

Para a soma 1555 existem 2 possibilidades:

$$\begin{array}{r} 827 \\ +\ 728 \\ \hline 1555 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 926 \\ +\ 629 \\ \hline 1555 \end{array}$$

Para a soma 1777 existe 1 possibilidades:

$$\begin{array}{r} 938 \\ +\ 839 \\ \hline 1777 \end{array}$$

Resposta: A mala do pai tem 11 códigos possíveis.